

ΜΕΛΕΤΗ ΧΟΡΔΗΣ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗΣ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΗΣ

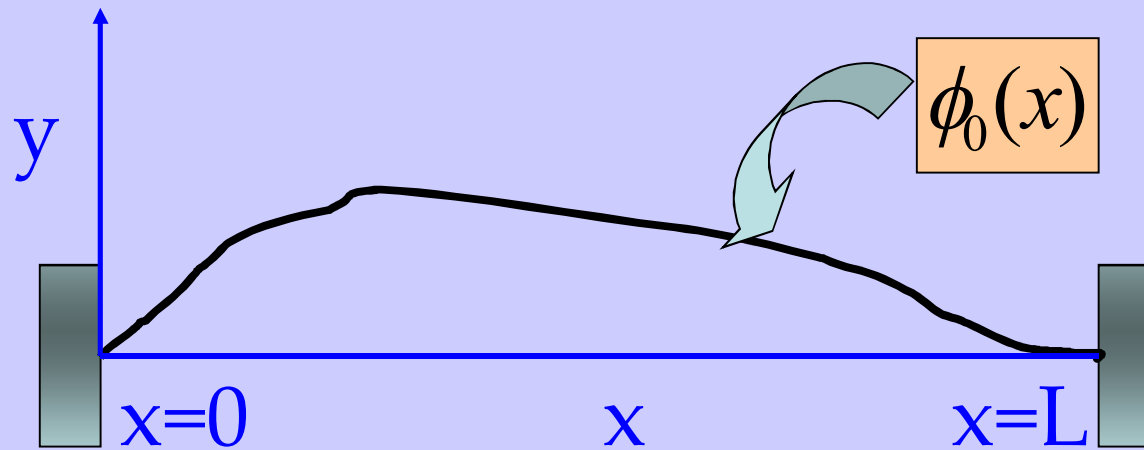


ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΕΥΤΑΞΙΑΣ

Ψαρεύοντας έρχεται η θάλασσα.

Οδυσσέας Ελύτης

Ο ΣΤΟΧΟΣ ΕΙΝΑΙ
Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ
 $y(x,t)$
ΠΟΥ ΑΠΟΚΑΘΙΣΤΑΤΑΙ ΣΕ ΧΟΡΔΗ
ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ
ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ ΤΗΣ
ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΗΣ.



ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

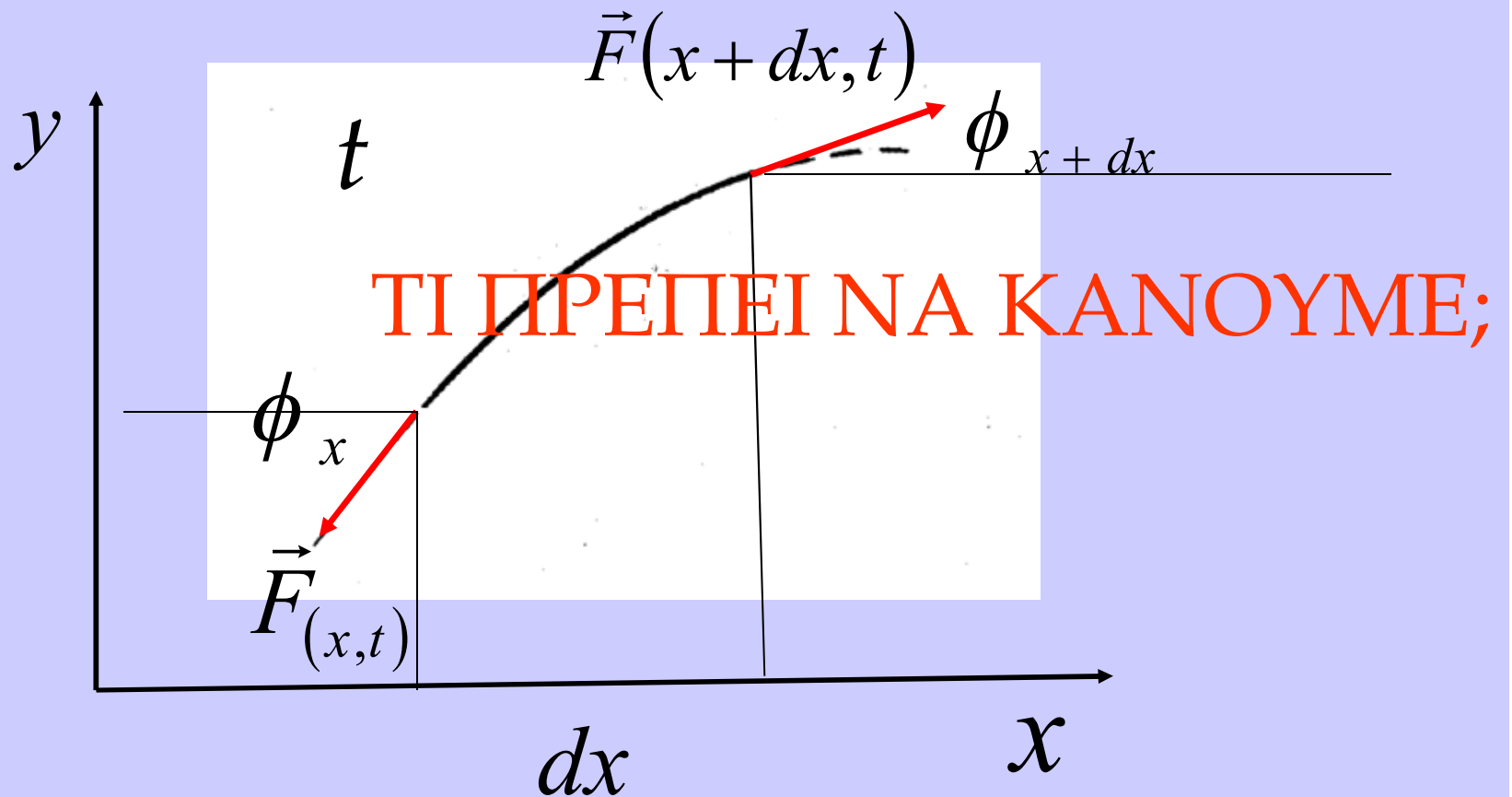
$$y(x = 0, t) = 0$$

$$y(x = L, t) = 0$$

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$y(x, t = 0) = \phi_0(x)$$

$$u_y(x, t = 0) = \frac{\partial y(x, t = 0)}{\partial t}$$



$$\overleftrightarrow{T} \quad \mu = \frac{dm}{dx} \quad \overleftrightarrow{T}$$

$$\sum \vec{F}_y(x, x+dx, t) = dm \frac{\partial^2 \vec{y}(x, t)}{\partial t^2}$$

ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ
ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗ Δ.Ε:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ Η $y(x,t)$

Η ΛΥΣΗ $y(x,t)$ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ
ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (1)
ΚΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (2) (3) (4) (5).

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$y(x=0, t) = 0 \quad (2)$$

$$y(x=L, t) = 0 \quad (3)$$

$$y(x, t=0) = \phi_0(x) \quad (4)$$

$$u_y(x, t=0) = \frac{\partial y(x, t=0)}{\partial t} \quad (5)$$

ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

ΤΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΖΕΙ ΜΙΑ ΤΕΤΟΙΑ ΛΥΣΗ;

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ
ΜΙΑ ΤΕΤΟΙΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ;

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ $f(x)$;

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ ω

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ:

$$y(x, t) = f(x) \sin(\omega t)$$

ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

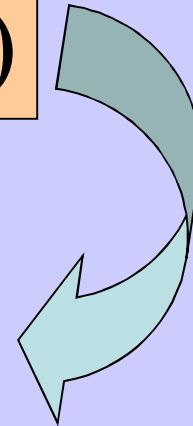
$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ $f(x)$;

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ:

$$y(x, t) = f(x) \sin(\omega t)$$

$$y(x, t = 0) = \phi_0(x)$$



ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:



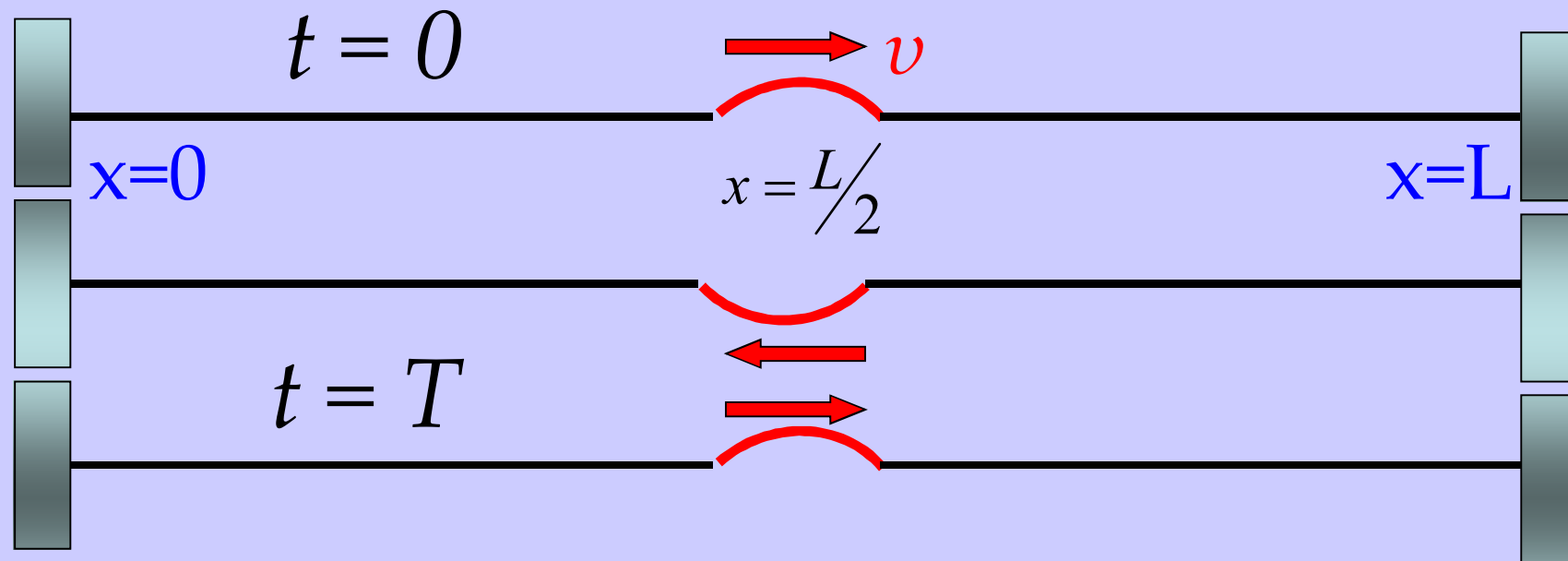
$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

ΠΩΣ

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ

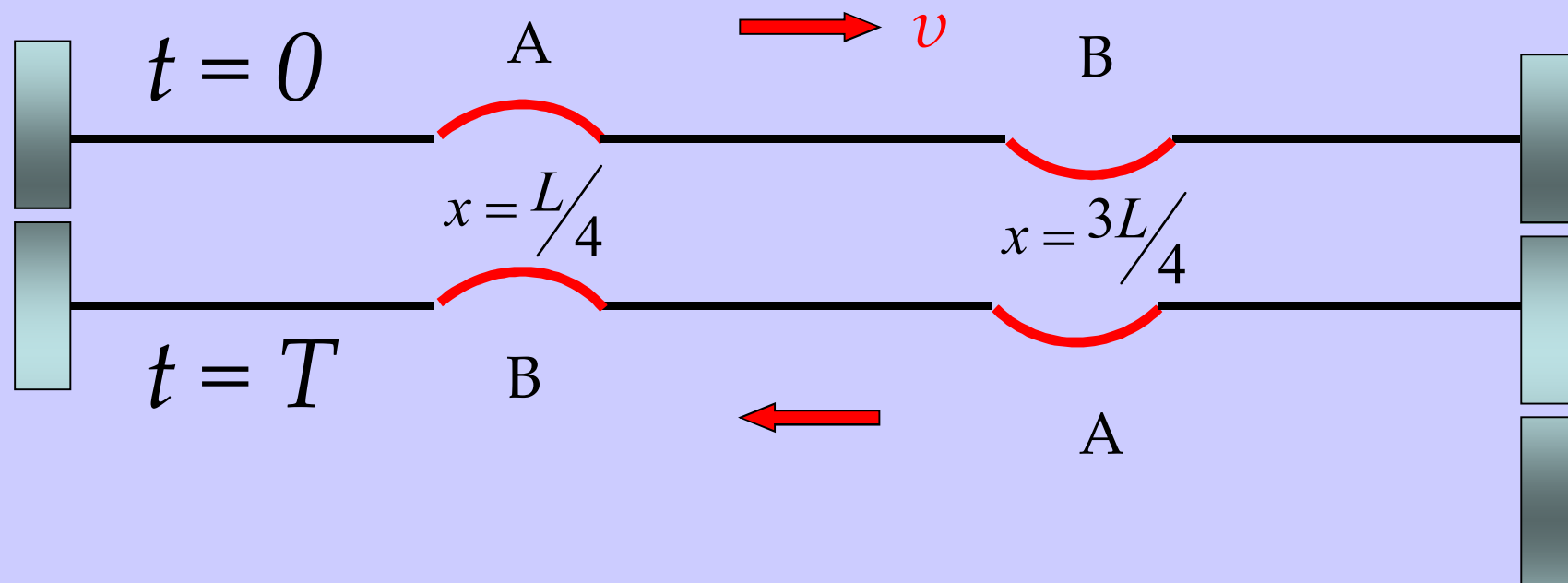
ω

(ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ);



Η ΧΟΡΔΗ ΑΝΑΚΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ
ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ:

$$T = \frac{v}{2L}$$



Η ΧΟΡΔΗ ΑΝΑΚΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ
ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ:

$$T = \frac{v}{L}$$

Η ΛΥΣΗ $y(x,t)$ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ
ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (1)
ΚΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (2) (3) (4) (5).

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$y(x=0, t) = 0 \quad (2)$$

$$y(x=L, t) = 0 \quad (3)$$

$$y(x, t=0) = \phi_0(x) \quad (4)$$

$$u_y(x, t=0) = \frac{\partial y(x, t=0)}{\partial t} \quad (5)$$

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

ΤΕΛΙΚΑ

ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΕΙΝΑΙ:

$f(x)$ ω

ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ!

ΟΠΟΥ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΣΥΝΑΝΤΑΜΕ ΤΗΝ ΠΟΣΟΤΗΤΑ

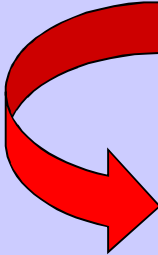
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ΑΥΤΟ ΘΑ ΓΙΝΕΤΑΙ
ΓΙΑ ΛΟΓΟΥΣ ΣΥΝΤΟΜΙΑΣ ΓΡΑΦΗΣ.
ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ
ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΜΕΛΑΤΑΜΕ.

ΠΡΩΤΟ ΒΗΜΑ

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$


$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

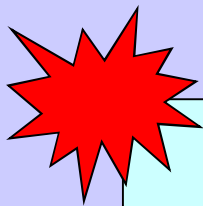

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f(x) = 0$$


$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right)$$

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right)$$

$$y(x, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right\} \cos(\omega t)$$



ΑΠΟ ΤΗΝ
ΑΡΜΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ
ΣΤΗΝ
ΑΡΜΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$$

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right)$$

$$y(x, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right\} \cos(\omega t)$$

ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ ΤΑ A , B , ω ;

ΘΑ ΚΑΘΟΡΙΣΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΙΣ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ – ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ!

ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΗΜΑ

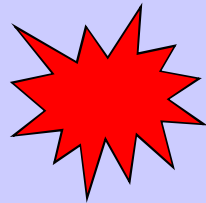
ΠΡΩΤΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ:

$$y(x = 0, t) = 0$$

$$y(x, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right\} \cos(\omega t)$$

$$y(x = 0, t) = 0$$

$$y(x = 0, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} 0\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} 0\right) \right\} \cos(\omega t) = B \cos \omega t = 0$$



$$B = 0$$

$$y(x, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right\} \cos(\omega t)$$

ТРІТО ВНМА

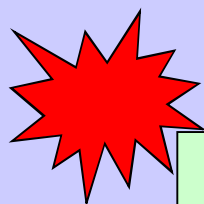
ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$y(x = L, t) = 0$$

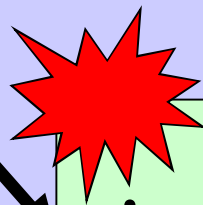
$$y(x, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right\} \cos(\omega t)$$

$$y(x = L, t) = 0$$

$$y(x = L, t) = \left\{ A \sin\left(\frac{\omega}{v} L\right) \right\} \cos(\omega t) = 0$$

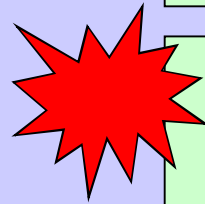


$$A=0$$

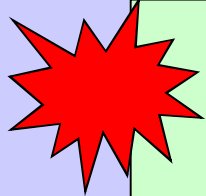


$$\sin\left(\frac{\omega}{v} L\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) = 0$$



$$\frac{\omega_n}{v}L = n\pi$$

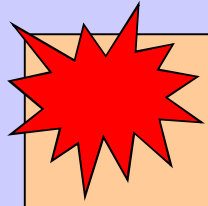


$$v_n = n \frac{v}{2L}$$

$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin\left(\frac{\omega_n}{v} x\right) \right\} \cos(\omega_n t) \quad \frac{\omega_n}{v} L = n\pi$$

$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\} \cos(\omega_n t)$$

$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin\left(\frac{2\pi}{2L} x\right) \right\} \cos(2\pi v_n t)$$



$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin \left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{n}} x \right) \right\} \cos(2\pi \nu_n t)$$

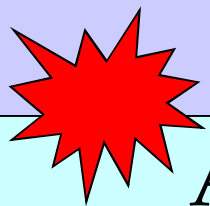
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ
ΤΟΥ
ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \right\} \cos(2\pi \nu_n t)$$

$$\nu_n = n \frac{v}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

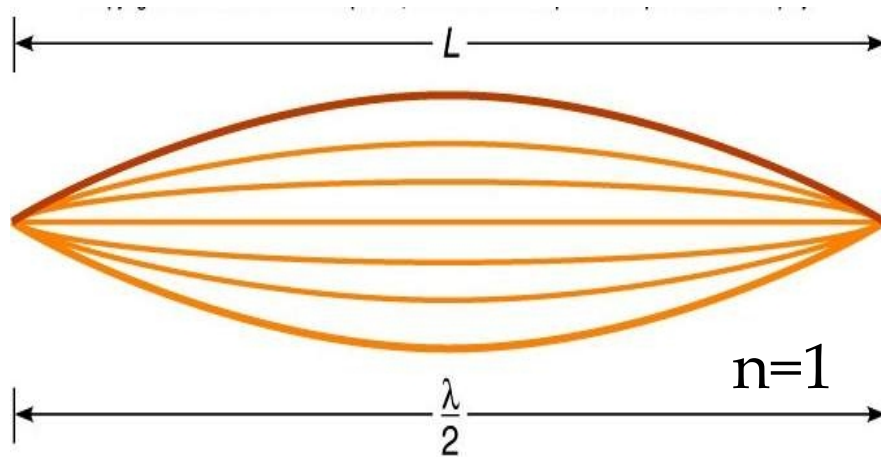


ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ
ΤΑ ΠΛΑΤΗ A_n

ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΑ

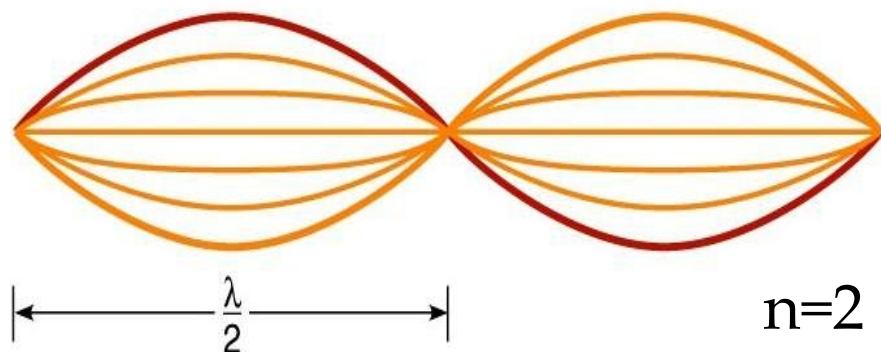
ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ



(a)

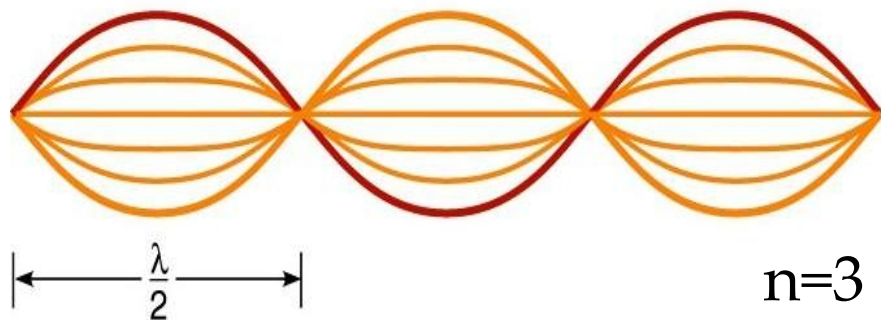
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$



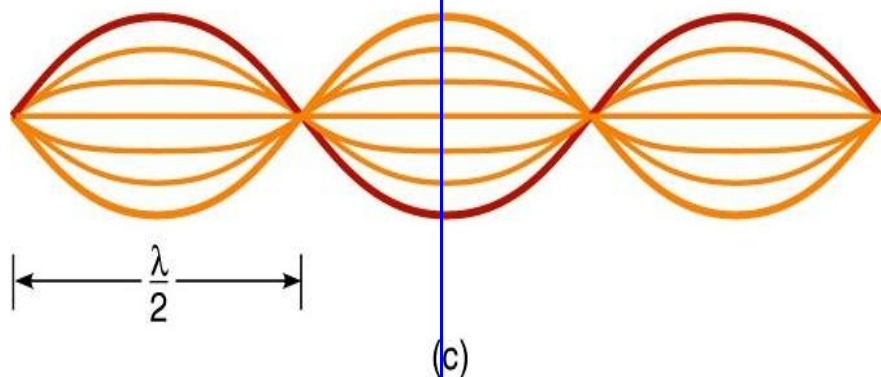
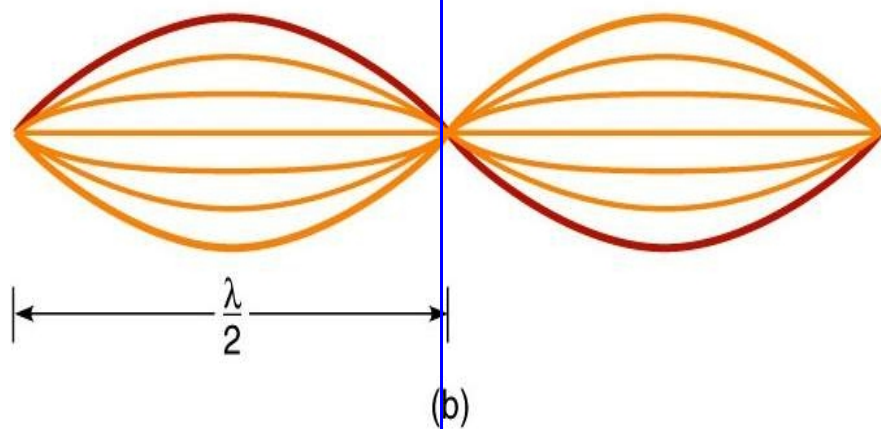
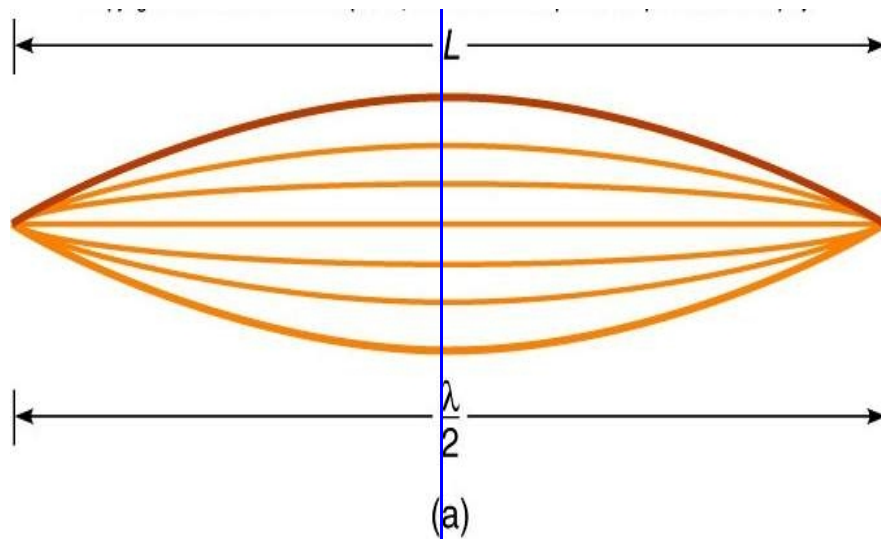
(b)

ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΚΟΜΒΟΥΣ
ΣΤΑ ΑΚΡΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΝΑ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΚΑΠΟΙΟΣ
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ



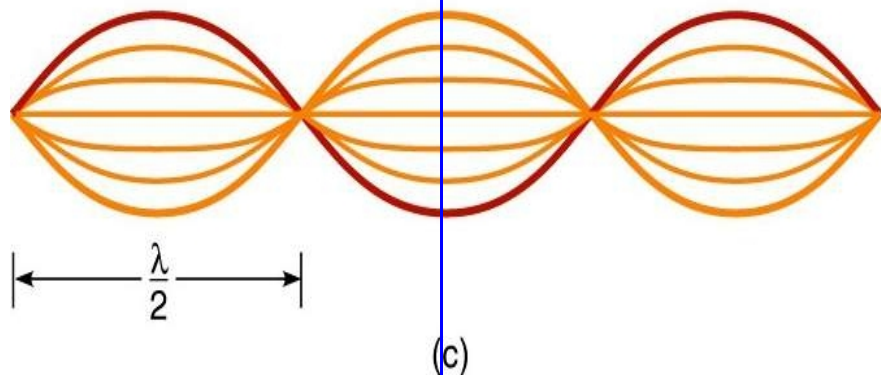
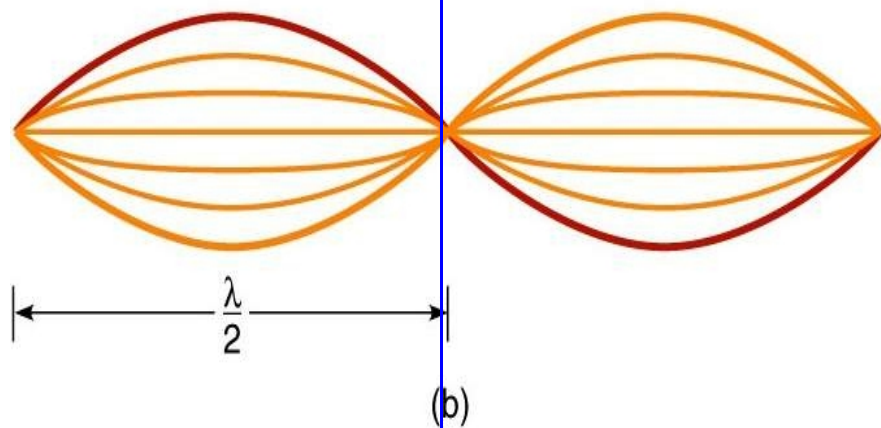
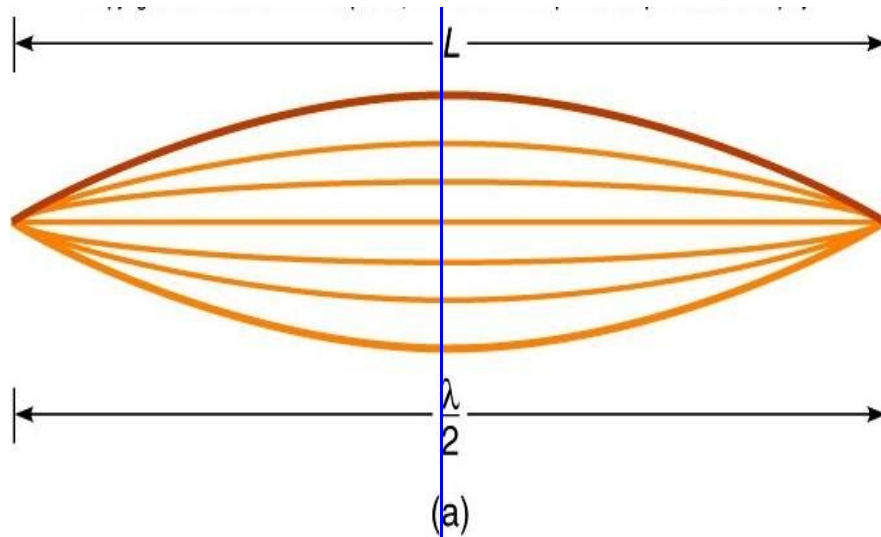
(c)

$$\frac{\lambda}{2}$$



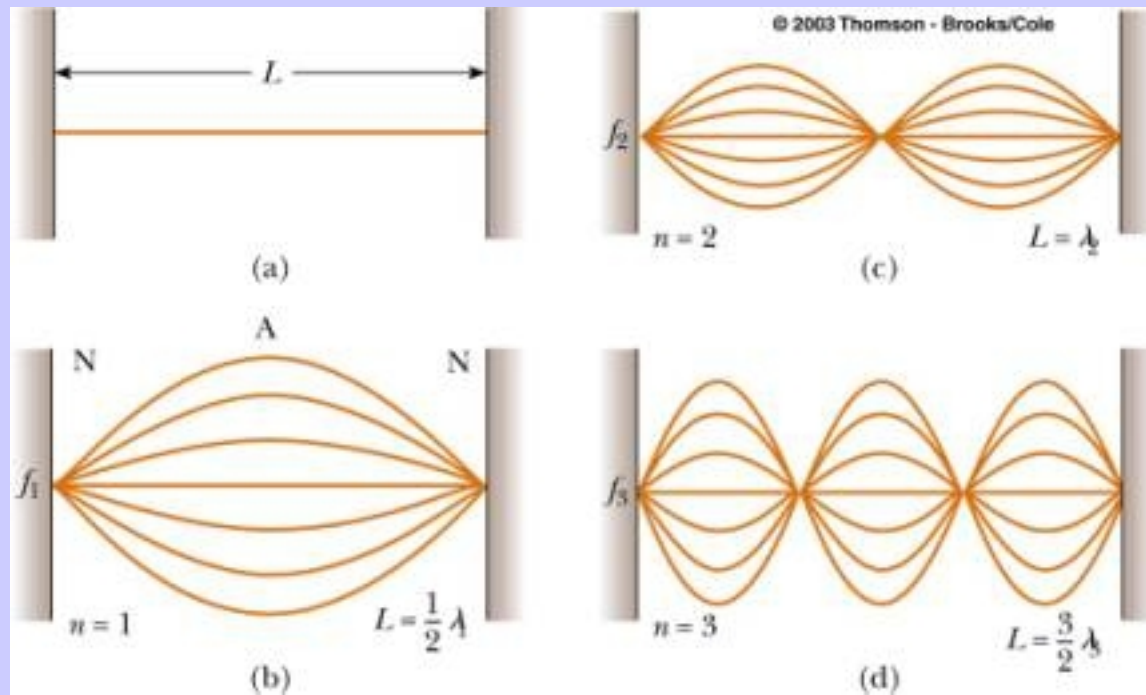
1. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΛΛΑΞ
ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ
ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ
ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ

2. Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ
ΑΥΞΑΝΕΙ ΚΑΤΑ ΜΟΝΑΔΑ
ΚΑΘΩΣ ΠΡΟΧΩΡΟΥΜΕ
ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΜΕΛΙΔΗ ΣΤΑΘΜΗ
ΣΤΙΣ ΑΝΩΤΕΡΕΣ

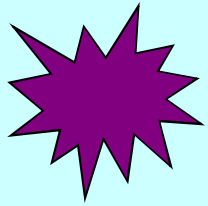


3. ΤΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2
ΕΙΝΑΙ ΛΟΓΙΚΟ.
ΓΙΑ ΝΑ ΦΙΑΧΤΕΙ
ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΧΩΡΕΣΟΥΝ
ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ

4. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΕΣ / ΠΕΡΙΤΤΕΣ
ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΕΑΝ
Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ
ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΟΣ / ΠΕΡΙΤΤΟΣ



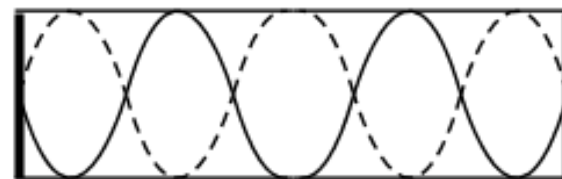
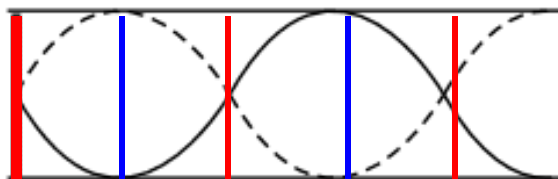
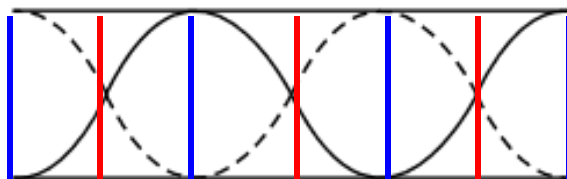
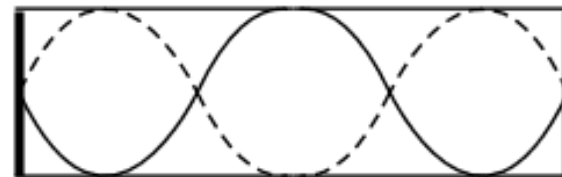
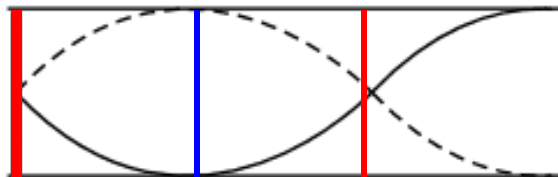
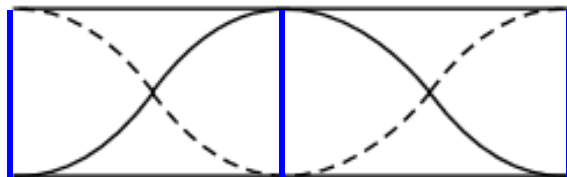
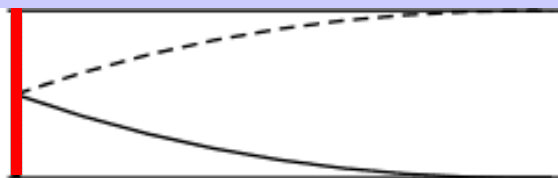
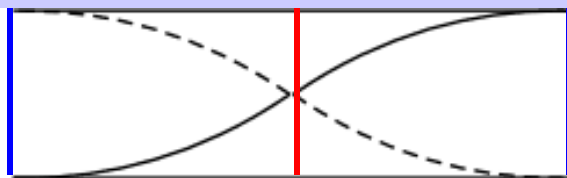
ΓΙΑ ΝΑ ΑΝΑΔΥΘΕΙ
ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΧΩΡΕΣΟΥΝ
ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ



ΜΕ ΤΟ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΑΝ
ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΚΑΘΟΡΙΣΤΗΚΑΝ ΤΑ
ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ
ΝΑ ΑΝΑΠΤΥΧΘΟΥΝ.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΤΑ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΑ ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ
ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΑ (μ, T) ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ
ΟΥΤΕ ΑΠΟ
ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.



L

L

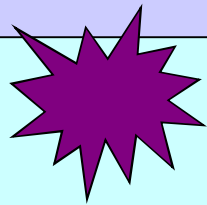
L

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = n \frac{v}{2L}$$

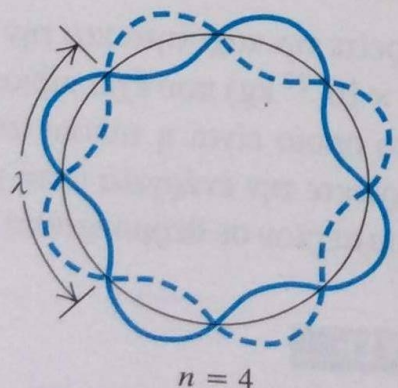
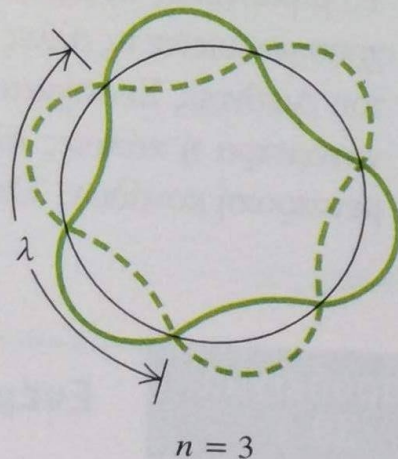
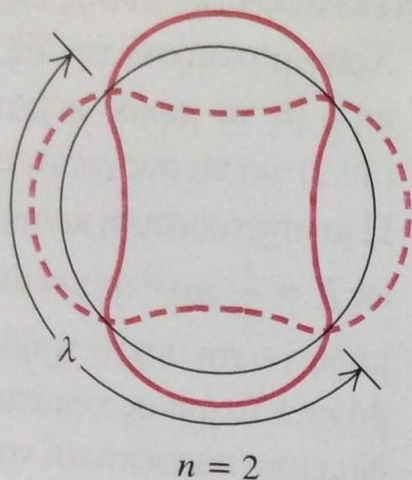


ΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ
ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (L)
ΚΑΙ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ
ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ (μ)- ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (T)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



$$v = f\left(\frac{1}{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ - ΔΙΑΣΤΑΣΗ}}\right)$$



ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΔΕΝ ΕΚΠΙΜΠΕΙ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΚΑΙ ΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ ΣΕ
ΤΡΟΧΙΕΣ ΤΟΥ ΒΟΗΡ ΔΕΝ ΕΚΠΕΜΠΟΥΝ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ
ΦΑΝΤΑΣΤΟΥΜΕ
ΟΤΙ ΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟ ΣΧΕΤΙΖΕΤΑΙ
ΜΕ ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ
ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΟ ΓΥΡΩ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ
ΠΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΕΙ ΚΑΠΟΙΑ ΤΡΟΧΙΑ
ΤΟΥ ΒΟΗΡ. ΓΙΑ ΝΑ ΤΑΙΡΙΑΞΕΙ Η
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ
ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΚΑΠΟΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΟ ΑΡΙΘΜΟ
ΜΗΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΣ

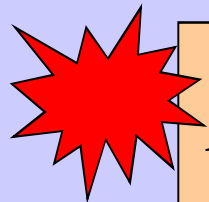
$$2\pi r = n\lambda$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

TETAPTO BHMA

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(2\pi \nu_n t)$$

ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ
ΤΑ ΠΛΑΤΗ A_n



$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} y_n(x, t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(2\pi \nu_n t)$$

ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ
ΤΑ ΠΛΑΤΗ *An*

ΑΠΟ ΤΙ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ
Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΠΛΑΤΩΝ;

ΑΠΟ ΤΙΣ
ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

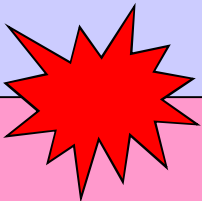
ΗΤΑΝ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ.
ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΕΤΑΙ
ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(2\pi v_n t)$$

$$y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cdot 1 = \phi_0(x)$$

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

ΤΙ ΜΑΣ ΛΕΕΙ Η:


$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

EINAI:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_m} x\right) dx = 0$$

$$n \neq m$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_m} x\right) dx = \frac{L}{2}$$

$$n = m$$

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx &= \\ &= \int_0^L \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx \end{aligned}$$

$$\int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = A_m \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = A_m \frac{L}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

$$y_n(x, t) = \left\{ A_n \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x \right) \right\} \cos(2\pi \nu_n t)$$

$$\nu_n = n \frac{v}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$$

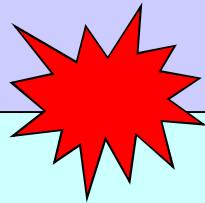
ΣΥΝΟΨΗ

Η ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ
ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.

1. ΤΑ ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

2. ΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ
(ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ-ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ)
ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ.

3. ΤΑ ΠΛΑΤΗ
ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ
ΤΡΟΠΟ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ.



ΠΩΣ
ΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ;

ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ;
ΤΙ ΛΕΕΙ Η ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ
ΠΟΥ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΥΝ
ΟΙ ΕΜΠΕΙΡΙΕΣ;

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

$$\rho_\delta(x, t) = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\rho_{\delta, n}(x, t) = \frac{1}{2} T A_n^2 (k_n)^2 \cos^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t)$$

$$(\Delta E)_n(x, t) = \int_0^L \rho_{\delta, n}(x, t) dx$$

$$(\Delta E)_n(x, t) = \frac{L}{4} T A_n^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t)$$

Δ
Υ
Ν
Α
Μ
Ι
Κ
Η

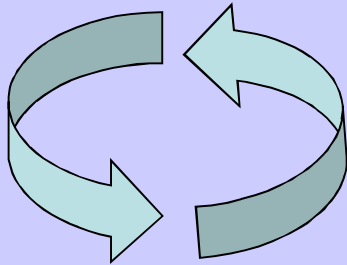
$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

K
I
N
H
T
I
K
H

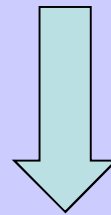
$$\rho_k(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2$$

$$(\text{KE})_n(t) = \frac{1}{4} L \mu A_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t)$$

$$(\Delta E)_n(t) = \frac{1}{4} L \mu A_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t)$$



$$(KE)_n(t) = \frac{1}{4} L \mu A_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t)$$

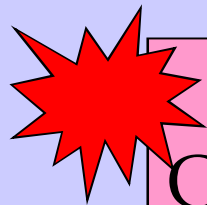


$$(ME)_n = \frac{1}{4} (L \mu) A_n^2 \omega_n^2$$

O
Λ
I
K
H

$$(M E)_n = \frac{1}{4} (L \mu) A_n^2 \omega_n^2$$

$$(M E)_{\text{ΟΛΙΚΗ}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{4} (L \mu) A_n^2 \omega_n^2$$

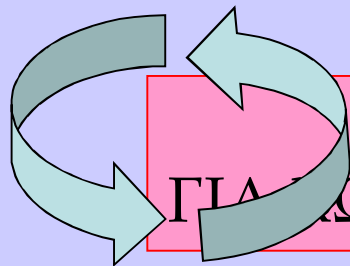


ΠΡΟΣΟΧΗ!
ΟΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ
ΣΕ ΟΛΟ ΤΟ ΜΗΚΟΣ
ΤΗΣ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗΣ ΧΟΡΔΗΣ

ΙΣΧΥΟΥΝ
ΓΙΑ ΧΩΡΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ;

$$(\Delta E)_n(t) = \frac{1}{4} L \mu A_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t)$$

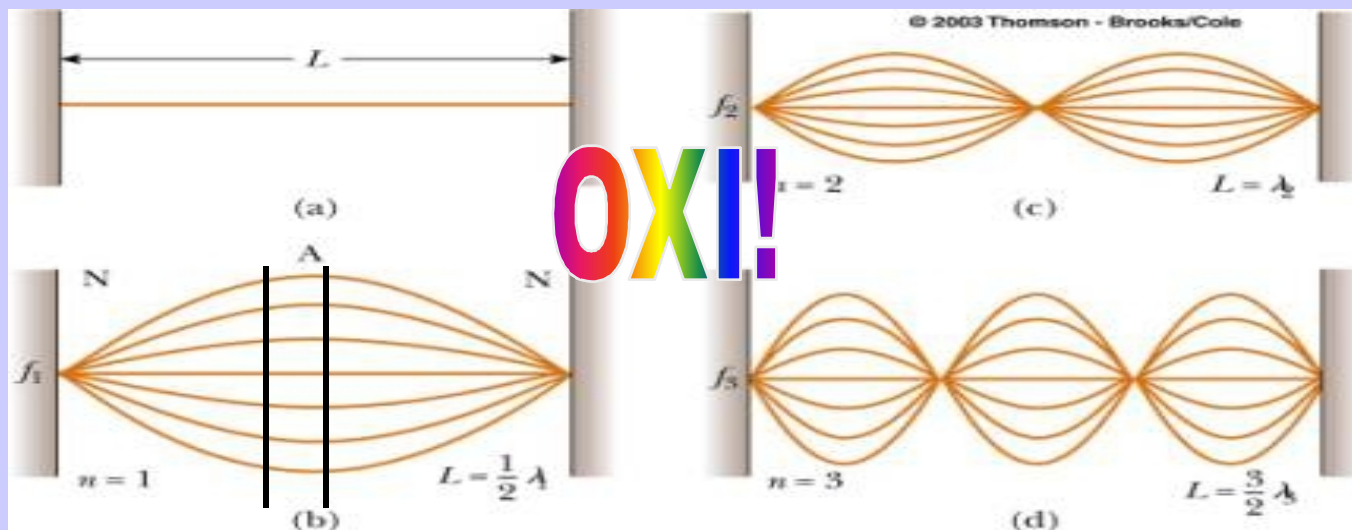
Ο
Λ
Ι
Κ
Η

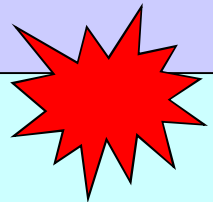
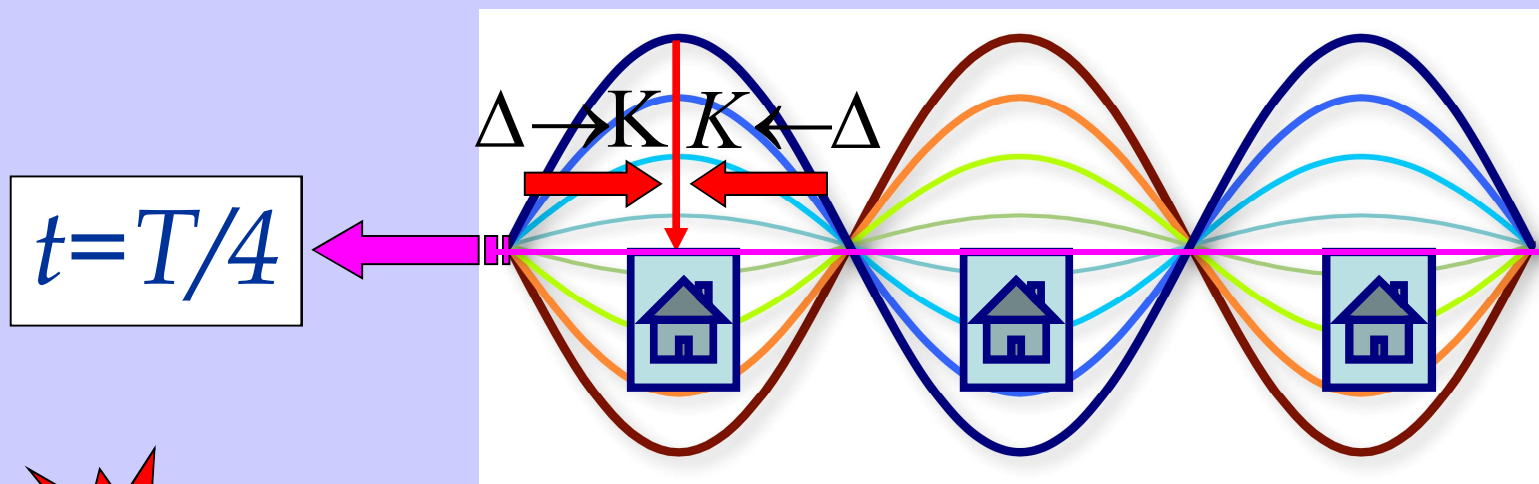
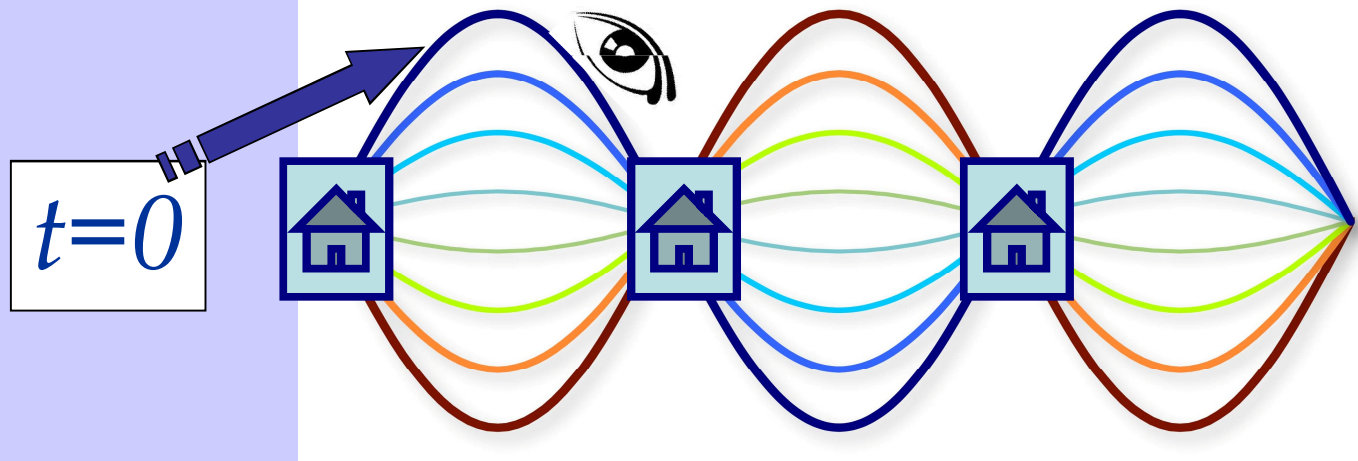


ΙΣΧΥΟΥΝ
ΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΟ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ;



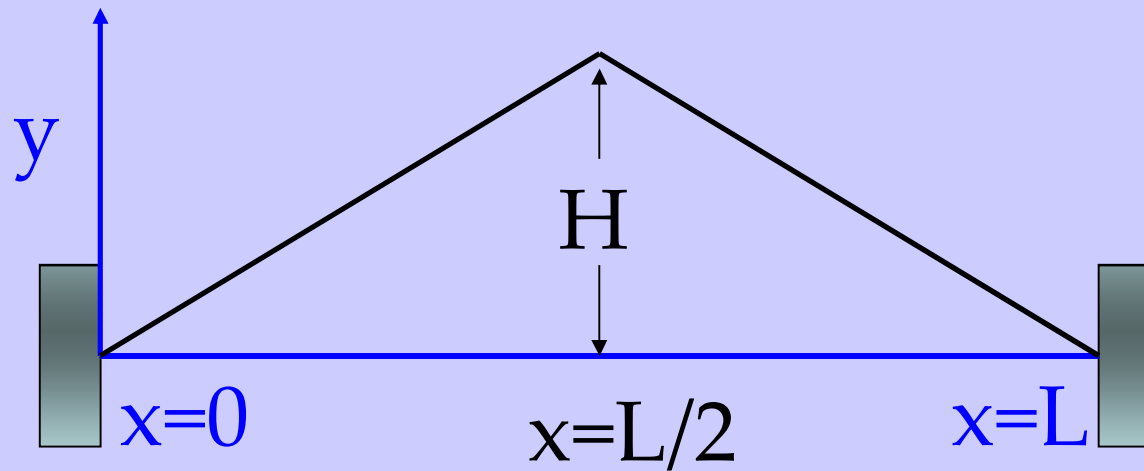
$$(KE)_n(t) = \frac{1}{4} L \mu A_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t)$$





**ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΡΟΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΑΠΟ ΚΟΙΛΙΕΣ ΠΡΟΣ ΔΕΣΜΟΥΣ
ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ.**

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



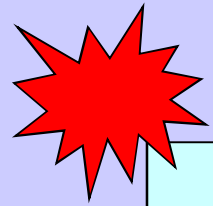
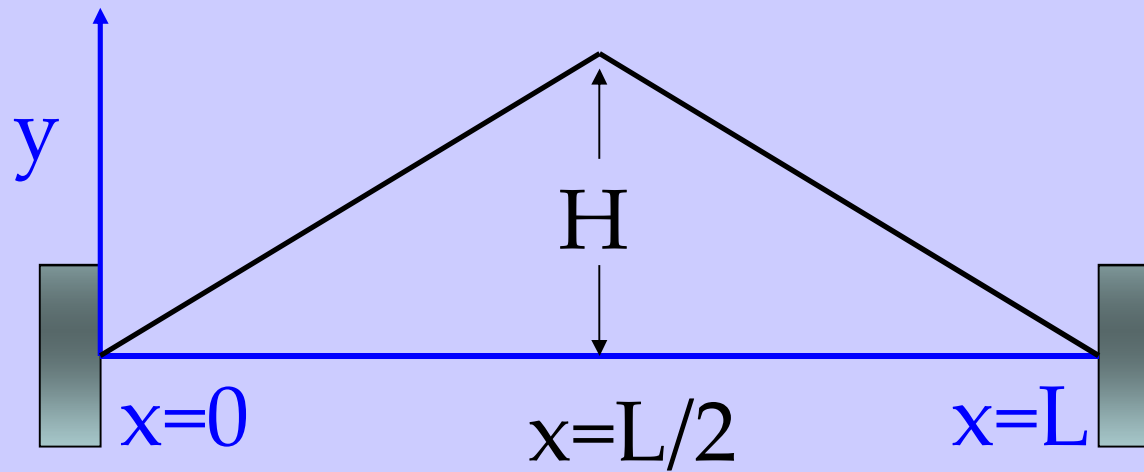
$$\phi_0(x) = \frac{2H}{L} x$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

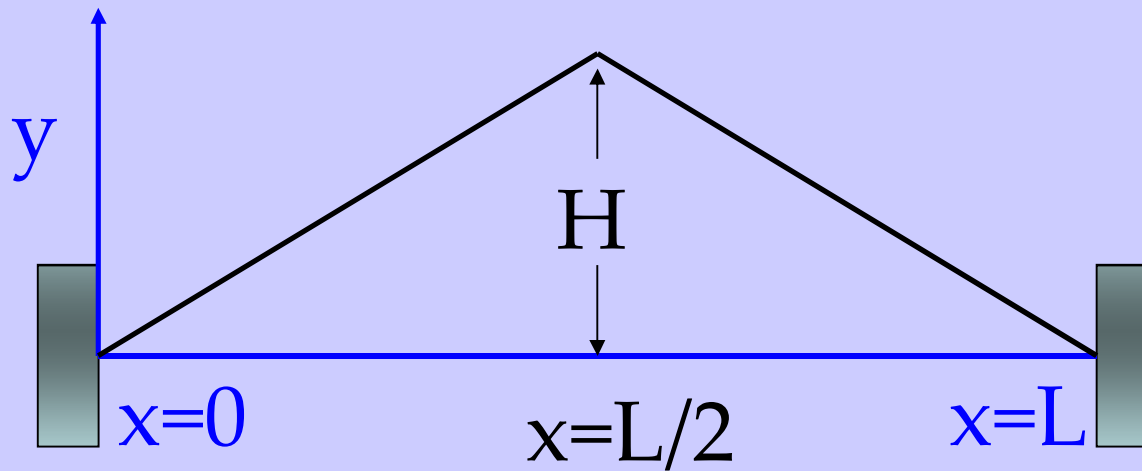
$$\phi_0(x) = 2H \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

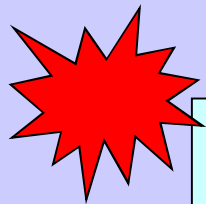
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$



$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right)$$



$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right)$$



ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΤΟΥ L;

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right)$$

$$A_1 = +\frac{8H}{\pi^2}$$

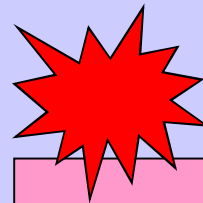
$$A_3 = -\frac{8H}{9\pi^2}$$

$$A_5 = +\frac{8H}{25\pi^2}$$

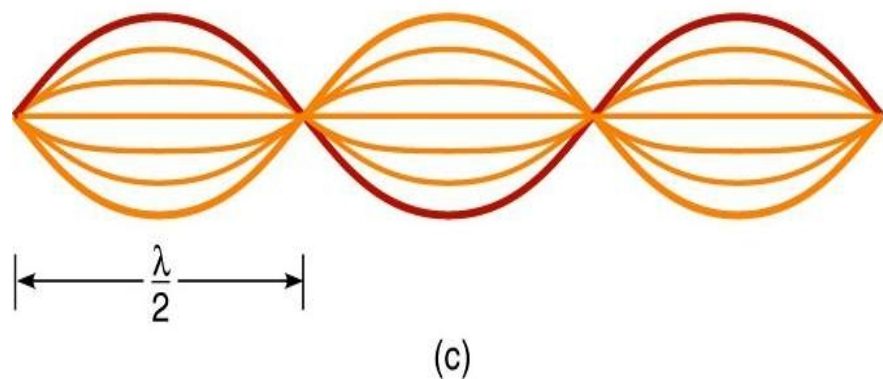
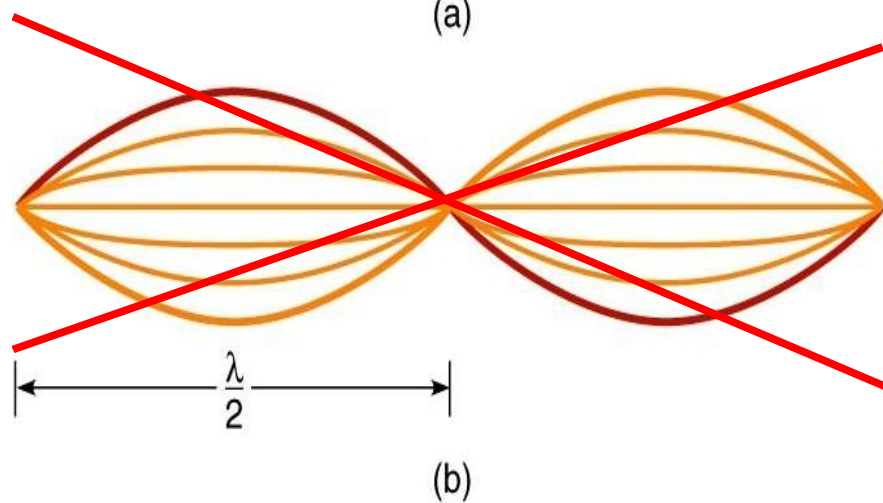
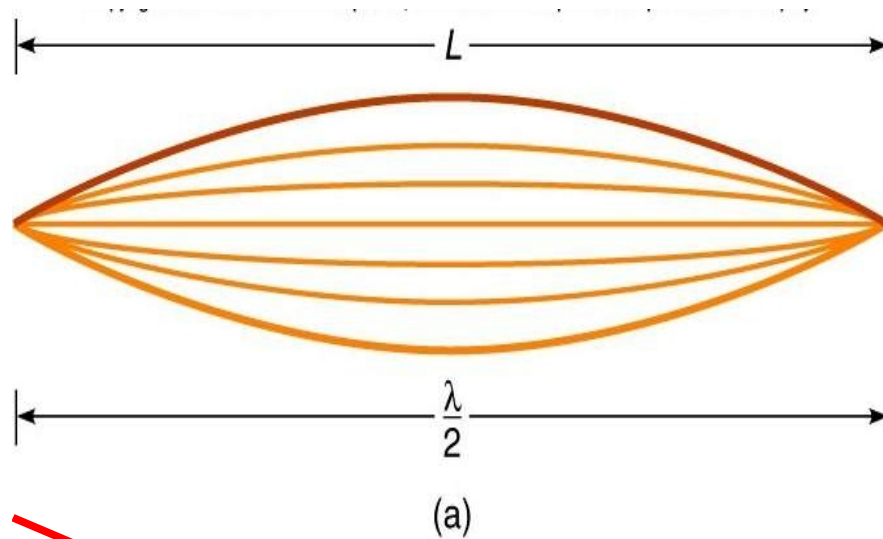
$$A_2 = 0$$

$$A_4 = 0$$

$$A_6 = 0$$



**ΔΕΝ
ΑΝΑΠΤΥΣΟΝΤΑΙ
ΟΛΑ ΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ**



ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΔΟΜΕΝΗ
ΔΙΕΓΕΡΣΗ
ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΙ
ΜΟΝΟ
ΤΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ.

ΣΥΝΟΨΗ

1. ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΑΠΟ ΜΟΝΕΣ ΤΟΥΣ
ΠΡΟΒΛΕΠΟΥΝ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟ ΝΑ ΑΝΑΠΤΥΧΘΟΥΝ.

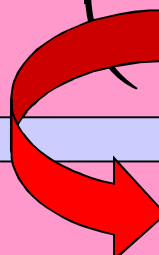
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = n \frac{v}{2L}$$

2. ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ
ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ
ΕΜΠΛΕΚΟΝΤΑΙ
ΣΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.

3. ΟΙ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ
ΠΟΙΟ
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ
ΣΤΑΣΙΜΩΝ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ
ΘΑ ΔΙΕΓΕΡΘΕΙ
ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ
ΠΟΥ ΕΠΙΤΡΕΠΟΥΝ ΝΑ ΑΝΑΔΥΘΟΥΝ
ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

ΤΙ ΜΑΣ ΛΕΕΙ Η:

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$


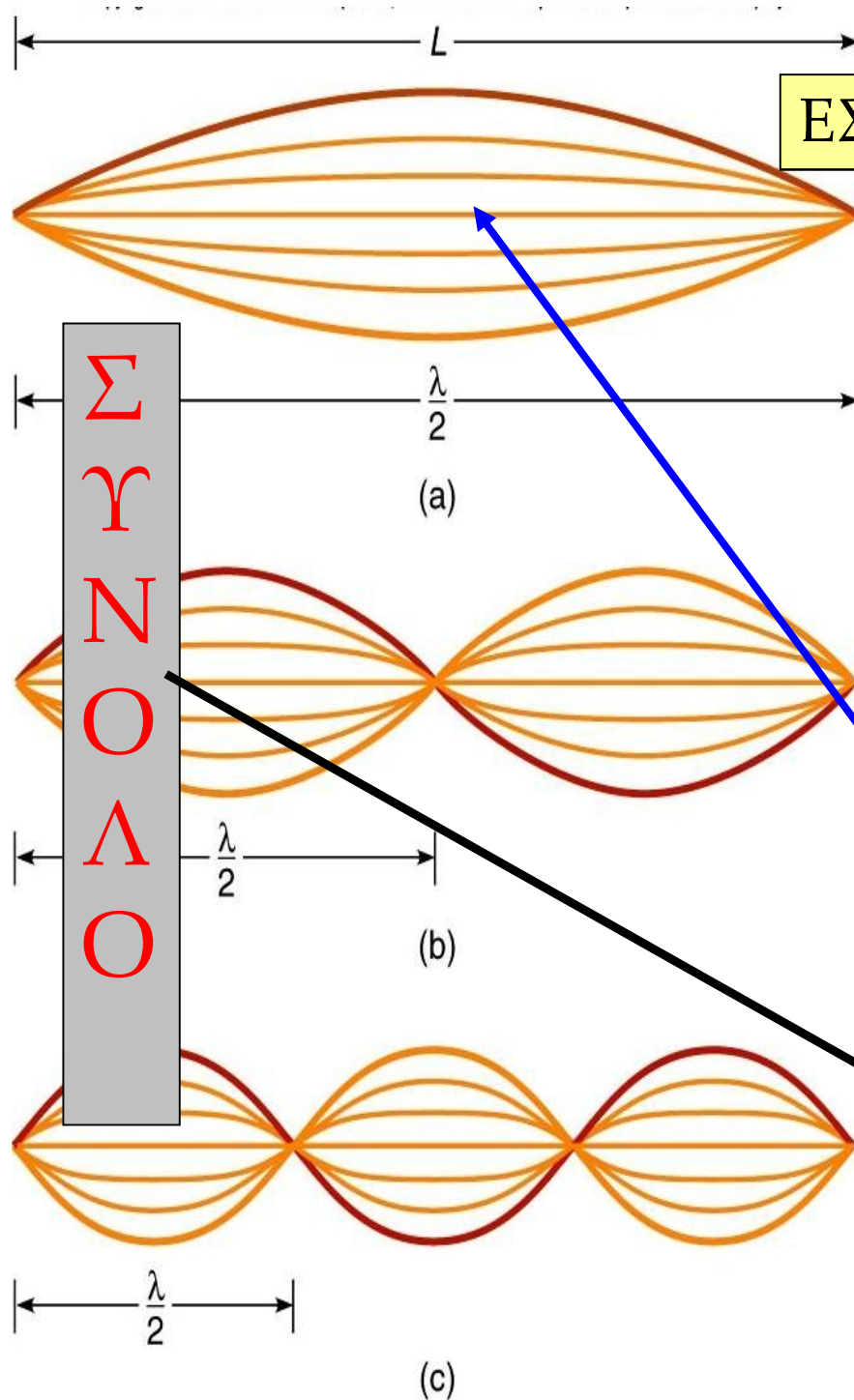
ΑΝΑΔΥΟΜΕΝΟ
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΑΠΟ
ΑΡΧΙΚΕΣ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n_{\text{ΕΠΙΤΡΕΠΤΑ}}}$$

ΕΠΙΤΡΕΠΤΟ
ΣΥΝΟΛΟ ΑΠΟ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



ΕΣΤΩ:

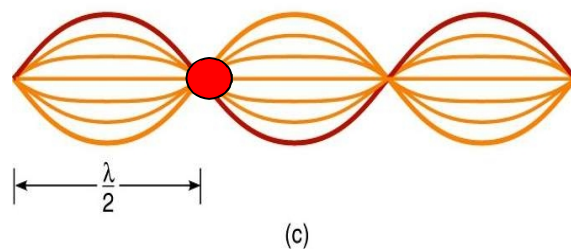
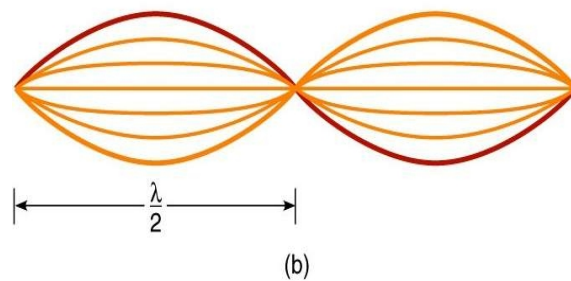
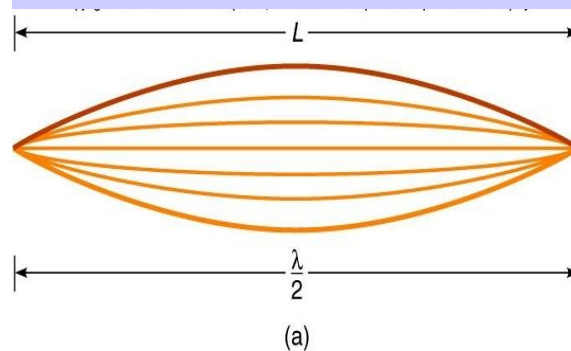
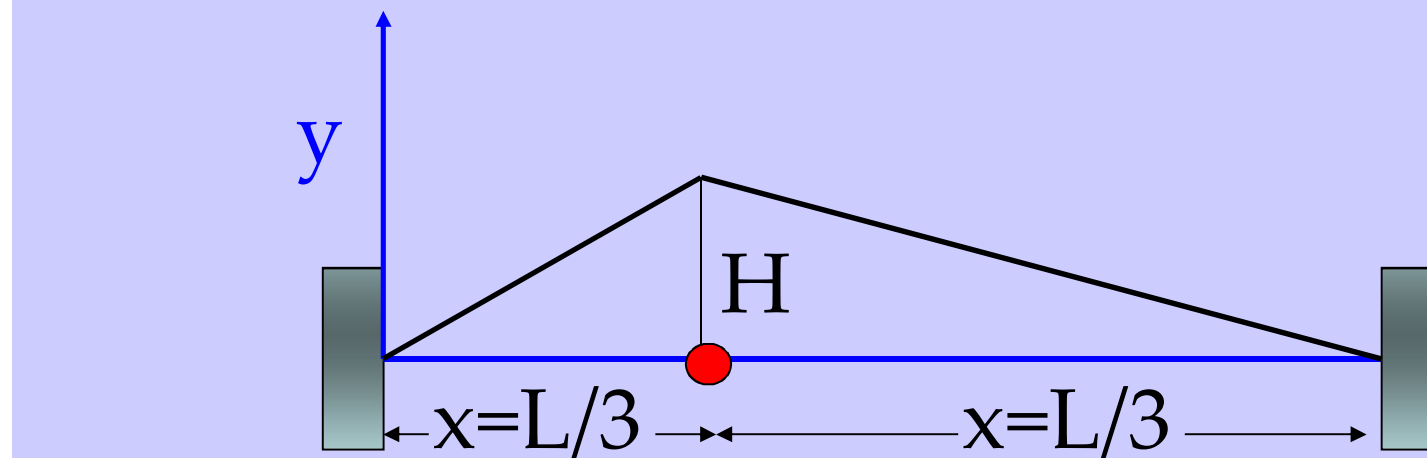
$$\phi_0(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\phi_0(x) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{2L}\right) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$$

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$n = 1$$

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ



ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ
ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΑΠΟ ΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΠΟΥ ΔΕΝ ΘΑ
ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙ;

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΔΕΝ ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ

$$(M E)_n = \frac{1}{4} (L \mu) A_n^2 \omega_n^2$$

$$A_{n=\pi \varepsilon \rho} = \frac{8 H}{\pi^2 n^2}$$

$$(M E)_n = \frac{16 H^2}{\pi^4} (L \mu) \frac{\omega_n^2}{n^4}$$

$$(M E)_n = \frac{16}{\pi^2} \frac{H^2 T}{L} \frac{1}{n^2}$$

$$(M E)_n = E_n = \frac{16}{\pi^2} \frac{H^2 T}{L} \frac{1}{n^2}$$

$$E_1$$

$$E_3 = \frac{1}{9} E_1$$

$$E_5 = \frac{1}{25} E_1$$

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ
ΔΕΝ ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ

ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΙ
ΟΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ.

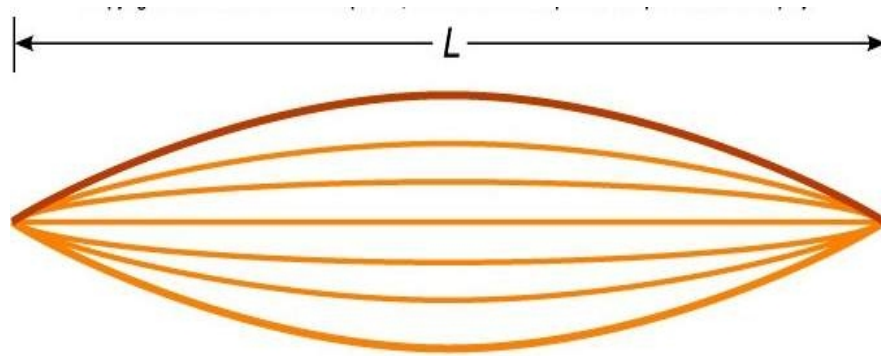
ΔΡΑΣΤΙΚΗ ΜΕΙΩΣΗ
ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ

n

$$(M E)_n = \frac{16}{\pi^2} \frac{H^2 T}{L} \frac{1}{n^2}$$

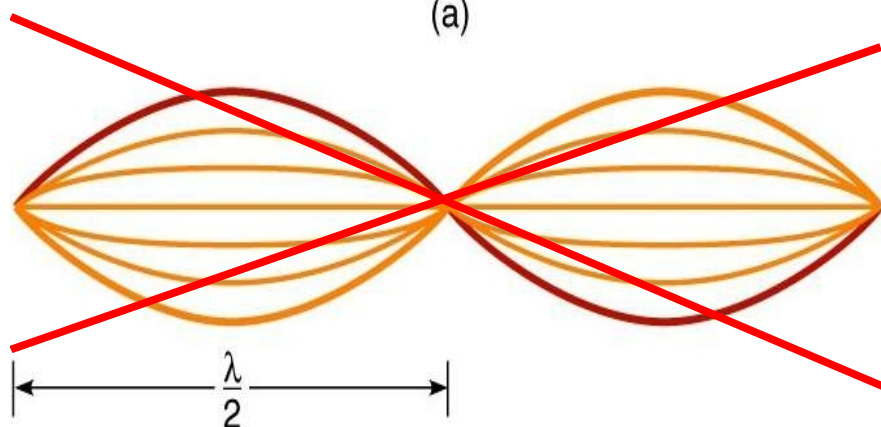
$$\sum_{n=\pi \epsilon \rho l \tau} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$(M E)_{O \Lambda I K H} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\frac{L}{2}} \right)^2 L = \frac{2 T (H)^2}{L}$$



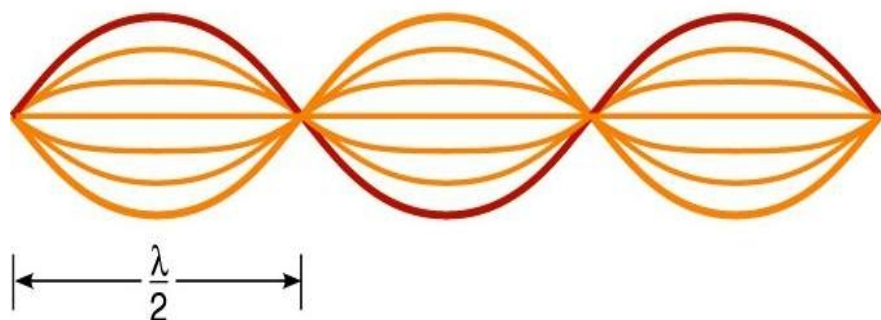
$\frac{\lambda}{2}$

(a)



$\frac{\lambda}{2}$

(b)



$\frac{\lambda}{2}$

(c)

ΓΙΑΤΙ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ
Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ
 n ;

$$A_1 = +\frac{8H}{\pi^2}$$

$$A_3 = -\frac{8H}{9\pi^2}$$

$$A_5 = +\frac{8H}{25\pi^2}$$

$$E_1$$

$$E_3 = \frac{1}{9} E_1$$

$$E_5 = \frac{1}{25} E_1$$

Η ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΣΥΣΤΟΛΗ
ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ
ΤΗΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ

ΠΟΙΑ ΘΑ ΗΤΑΝ Η ΣΥΝΕΠΕΙΑ
ΑΝ ΟΛΟ ΤΟ
ΣΥΝΕΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ
ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ
Ή
ΕΙΧΑΜΕ
ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ;

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΘΕ ΕΝΟΣ
ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΕΙΡΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΘΑ ΕΤΕΙΝΕ ΣΤΟ ΜΗΔΕΝ.

ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΗΡΧΕ ΜΟΥΣΙΚΗ!

ΠΟΙΑ ΘΑ ΗΤΑΝ Η ΣΥΝΕΠΕΙΑ
ΑΝ ΟΛΟ ΤΟ
ΣΥΝΕΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ
ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ
Ή
ΕΙΧΑΜΕ
ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ;

~~ΕΑΡΤΗ~~

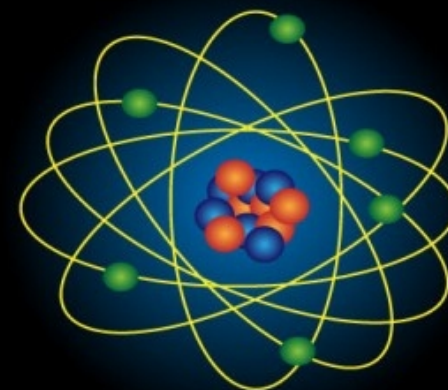
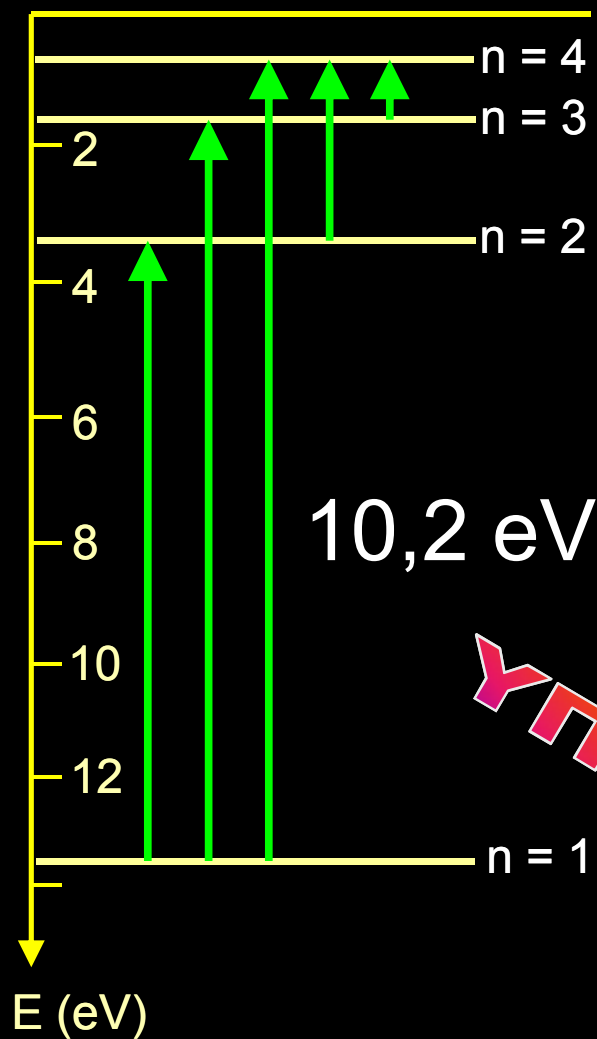
Διάγραμμα ενεργειακών σταθμών

$$E_4 = -0,85 \text{ eV}$$

$$E_3 = -1,51 \text{ eV}$$

$$E_2 = -3,4 \text{ eV}$$

$$E_1 = -13,6 \text{ eV}$$



ΚΒΑΝΤΙΣΗ

ΓΙΑΤΙ
ΥΠΑΡΧΟΥΜΕΣ;

Η ΚΒΑΝΤΩΣΗ
ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΑΤΟΜΑ
ΟΔΗΓΕΙ
ΣΤΗΝ ΑΤΟΜΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ.

ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΓΟΝΟΣ
ΟΤΙ ΖΟΥΜΕ
ΜΑΣ ΟΔΗΓΟΥΣΕ ΣΤΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΩΣΗΣ
ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟΣΟ ΑΠΛΑ
ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥΣ...

Η ΦΥΣΗ ΔΕΝ ΚΑΝΕΙ ΤΙΠΟΤΕ ΤΟ ΑΣΚΟΠΟ
ΤΙΠΟΤΑ ΤΟ ΠΕΡΙΤΤΟ

Αριστοτέλης

ΟΛΑ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΛΟΓΟ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΗ

Λεύκιππος

Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΕΩΣ!

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΚΕΤΟ
ΝΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΜΕ
ΜΕ ΣΑΦΗΝΕΙΑ
ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΡΟΠΟ
ΤΟ ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ.

ΠΡΕΠΕΙ
ΝΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΜΕ
ΓΙΑΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ
ΟΠΩΣ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ.
ΠΟΙΕΣ ΘΑ ΗΤΑΝ ΣΕ ΑΛΛΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ
ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ.

ΓΙΑΤΙ Η ΧΟΡΔΗ ΚΑΝΕΙ ΤΗΝ ΕΠΙΛΟΓΗ
ΝΑ ΜΟΙΡΑΣΕΙ ΑΝΙΣΑ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ
ΤΗΣ ΔΩΣΑΜΕΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ;

